Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

IIR - beskonačan impulsni odziv

U analognim sistemima ne postoje funkcije prenosa koje imaju samo nule, jer se to protivi uslovima fizičke ostvarljivosti.

Ne mešati to što je u praktičnim slučajevima impulsni odziv OGRANIČAVAN.

FIR - konačan impulsni odziv

Preko analognog prototipa - transformacijom?
Računski, diskretni, digitalni domen – moguće nešto i što nije "fizički" ostvarljivo
Funkcije prenosa sistema sa konačnim impulsnim odzivom (FIR) sintetizuju se direktnom sintezom u *z-ravni*.

- metod sinteze koji koristi prozorske funkcije za ograničavanje impulsnog odziva
- metod frekvencijskog odabiranja
- optimizacione metode projektovanja

- linearna faza
- linearna amplitudska karakteristika
- konstantan fazni pomeraj od 90°
- ...

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sistem koji ima konačan impulsni odziv

$$h[n] \neq 0 \quad n = 0,1 \ldots M-1$$
$$h[n] = 0 \quad za\ sve\ ostale\ vrednosti$$

Njegova z transformacija, odnosno funkcija prenosa sistema u z domenu

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} = \frac{1}{z^{M-1}} \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{M-1-n}$$

Ima samo nule?

Frekvencijski odziv

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-jn\Omega} = \left|H(e^{j\Omega})\right| e^{j \arg H(e^{j\Omega})} = M(\Omega) e^{j\theta(\Omega)}$$

Fazno kašnjenje

$$\tau_p(\Omega) = -\frac{\theta(\Omega)}{\Omega}$$

Grupno kašnjenje

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega}$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Zašto je bitna "linerana" faza odnosno fazno kašnjne i grupno kašnjenje

Neka je na ulazu u sistem signal

$$s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2)$$

Njegov vremenski oblik

$$s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) = 2\cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

Ako signal prolazi kroz sistem koji ima konstantno pojačanje
ali unosi različite fazne stavove na različitim učestanostima

$$s^*(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + \Delta\varphi_2)$$

Njegov vremenski oblik

$$s^*(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \Delta\varphi_1) + \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + \Delta\varphi_2) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1}{2}\right)$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

$$s(t) = 2\cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

$$s^*(t) = 2\cos\left(\frac{\omega_0 t + \varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{3\omega_0 t + \varphi_2 + \varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1}{2}\right)$$

Izlazni signal je "zakašnjen" ali da bi se zadržao oblik $s^*(t + \Delta t) = s(t)$

$$\omega_0 \Delta t + \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 0$$
$$3\omega_0 \Delta t + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1 = 0$$

$\Delta\varphi_2 = -2\omega_0 \Delta t$ Fazna linerano zavisi od učestanosti

$\Delta\varphi_1 = -\omega_0 \Delta t$ Fazno kašnjenje konstantno

Grupno kašnjenje konstantno

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

i fazno i grupno kašnjenje konstantno

$$\tau_g(\Omega) = \tau_p(\Omega) = \tau$$

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega = \tan^{-1}\frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\cos n\Omega}$$

$$\tan\tau\Omega = \frac{\sin\tau\Omega}{\cos\tau\Omega} = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\cos n\Omega}$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n](\cos n\Omega \sin\tau\Omega - \sin n\Omega\cos\tau\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin(\tau\Omega - n\Omega) = 0$$

rešenje

$$\tau = \frac{M-1}{2} \qquad h[n] = h[M-1-n], \quad n = 0, \ldots, M-1$$

Digitalna obrada signala

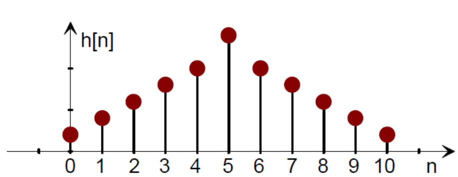
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

IMPULSNI ODZIV SIMETRIČAN

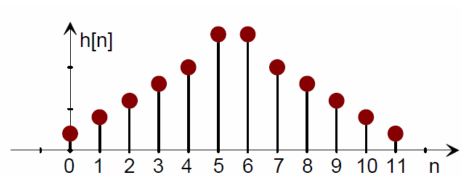
Tip I FIR filtra M neparan broj
impulsni odziv je simetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom (M −1)/2

Tip II FIR filtra M paran broj
impulsni odziv je simetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima (M − 2)/2 i M/2

Tip I FIR



Tip II FIR



Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

samo grupno kašnjenje konstantno

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega + \theta_0 = \tan^{-1}\frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\cos n\Omega}$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin(\tau\Omega - \theta_0 - n\Omega) = 0$$

rešenje

$$\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \tau = \frac{M-1}{2} \qquad h[n] = -\,h[M-1-n], \quad n = 0,\dots,M-1$$

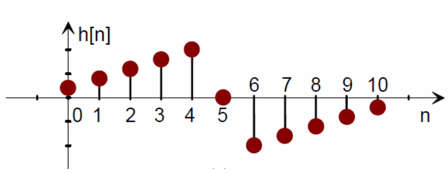
Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

IMPULSNI ODZIV ANTISIMETRIČAN

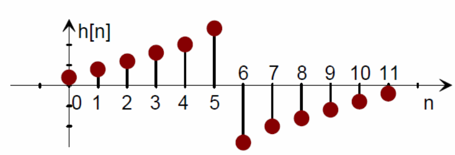
Tip III FIR filtra M neparan broj
impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom (M −1)/2

Tip IV FIR filtra M paran broj
impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima (M − 2)/2 i M/2.

Tip III FIR



Tip IV FIR

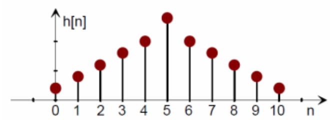


Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Frekvencijska karakteristika

FIR tipa I - impulsni odziv simetričan, M neparan broj



$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-jn\Omega} + h[(M-1)]/2]e^{-j\Omega(M-1)/2} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega}$$

$$\sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[M-1-n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-j\Omega(M-1-n)}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2}\left\{h[(M-1)/2] + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} 2h[n]\cos\Omega\left(\frac{M-1}{2}-n\right)\right\}$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Frekvencijska karakteristika

FIR tipa I

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos\Omega k$$

$$a_0 = h[(M-1)/2]$$

$$a_k = 2h[(M-1)/2-k]$$

FIR tipa II

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \cos\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)$$

$$b_k = 2h[M/2-k]$$

FIR tipa III

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2-\pi/2]} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k$$

FIR tipa IV

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2-\pi/2]} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right) = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Raspored nula

1. Kompleksne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u *kvadrupletima* (grupama po četiri konjugovano kompleksne i recipročne nule) na lokacijama: z_i, z_i^*, z_i^{-1} i $(z_i^*)^{-1}$,

2. Realne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u recipročnim parovima: z_i, z_i^{-1},

3. Prozvoljan broj konjugovano kompleksnih parova nula može ležati na jediničnom krugu pošto je:

$$(z - z_i)(z - z_i^*) = (z - e^{j\phi_i})(z - e^{-j\phi_i}) = \left(z - \frac{1}{z_i^*}\right)\left(z - \frac{1}{z_i}\right)$$

4. Proizvoljan broj nula može ležati u tačkama $z_i = \pm 1$, jer je tada takođe $z_i^{-1} = \pm 1$.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Raspored nula

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{-n} = \pm \sum_{k=M-1}^{0} h[k]z^{k} z^{-(M-1)} = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

+ simetričan
- antisimetričan

$$z = -1$$
$$H(-1) = \pm(-1)^{-(M-1)} H(-1)$$

Fir II, M parno $\quad H(-1) = -H(-1) \quad H(-1) = 0 \quad$ *mora imati nulu u tački* $z = -1$

Fir III, M neparno $\quad$ *mora imati nulu u tački* $z = -1$

$$z = 1$$
$$H(1) = \pm H(1)$$

tip III i tip IV FIR filtra moraju imati nule u tački $z = 1$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Faza linearna
Aproksimacija amplitudske karakteristike

Diskretan sistem -> Željena amplitudska karakteristika periodična funkcija
Furijeov red

$$H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] e^{-jn\Omega}$$

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$e^{j\Omega} = z$$

$$H_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] z^{-n}$$

Moguće napraviti?

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Ograničavanje impulsnog odziva

Odsecanjem
$$\tilde{h}[n] = \begin{cases} h_D[n], & |n| \le \frac{M-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M-1}{2} \end{cases}$$
želimo M neparno

Kauzalno? Još uvek ne! Pomeranje u desno za $(M-1)/2 \rightarrow z^{-(M-1)/2}$

$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0, & n < 0,\ n \ge M \end{cases}$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2}\tilde{H}(z) = z^{-(M-1)/2}\left\{h[(M-1)/2] + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]\left[z^{[(M-1)/2-n]} + z^{-[(M-1)/2-n)]}\right]\right\}$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Digresija

$h[n] = h[M-1-n]$ $\quad$ $h[n] = -h[M-1-n]$ $\quad$ M neparno

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n}$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2}\left\{\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]\left(z^{(M-1)/2-n} \pm z^{-[(M-1)/2-n]}\right) + \frac{1}{2} h[(M-1)/2](z^0 \pm z^0)\right\}$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} \frac{1}{2} a_k \left(z^k \pm z^{-k}\right)$$

$$a_0 = h[(M-1)/2]$$

$$a_k = 2h[(M-1)/2-k]$$

Digitalna obrada signala

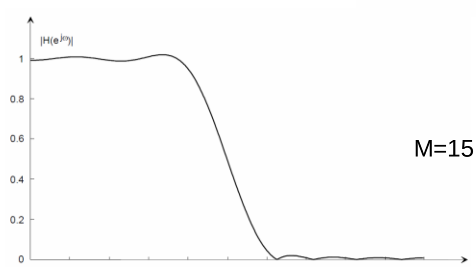
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Koliko dobro?

Idealan NF sa linearnom fazom

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega\tau}, & \Omega < \Omega_c \\ 0, & \Omega > \Omega_c \end{cases}$$

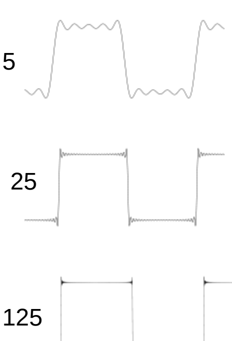


M=15

5

25

125



Najveće oscilacije oko Ω_c

Gibsove oscilacije

Premašenje amplitude oko 9%, 0.75dB

Slabljenje samo 21dB

Malo zavisi od M

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Odsecanje ali na drugi način
Prozorske funkcije $W(z)$

$$h_w[n] = \begin{cases} w[n]h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0,1,\dots,M-1 \\ 0, & n < 0,\ \ n \geq M \end{cases}$$

$$H_w(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1} H_D(u)W\left(\frac{z}{u}\right)u^{-1}du$$

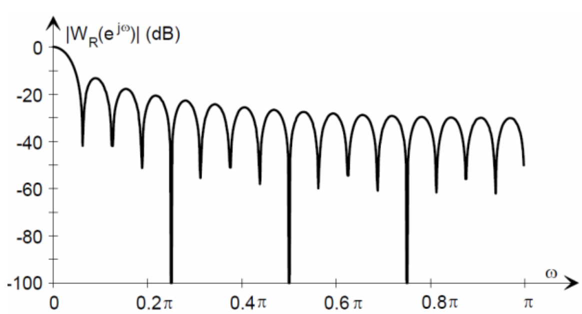
$$H_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(e^{j\upsilon})W[e^{j(\Omega-\upsilon)}]d\upsilon$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Pravougaona prozorska funkcija

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\dots,M-1 \\ 0, & n < 0,\ \ n \geq M \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\Omega M/2)}{\sin(\Omega/2)}e^{-j\Omega(M-1)/2}$$



M=32

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Pravougaona prozorska funkcija

Razlog za pojavu Gibsovih oscilacija je konvolucija u frekvencijskom domenu između željene frekvencijske karakteristike i frekvencijske karakteristike pravougaone prozorske funkcije koja izaziva odstupanja od željene karakteristike.

Odstupanja su posledice dve karakteristike spektra prozorske funkcije.

Širina glavnog luka u spektru prozorske funkcije utiče na širinu prelazne zone, dok amplituda bočnih lukova u spektru prozorske funkcije utiče na amplitudu Gibsovih oscilacija.

Dakle, dobra prozorska funkcija trebalo bi da ima što uži glavni luk i što veće potiskivanje bočnih lukova, što su kontradiktorni zahtevi.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

1. Prozorske funkcije u spektralnoj analizi najčešće imaju paran broj članova (obično 2^p) dok prozorske funkcije u sintezi FIR filtara imaju neparan broj članova. Ova razlika je posledica činjenice da najefikasniji algoritmi za izračunavanje DFT zahtevaju da sekvenca ima paran broj članova, a u sintezi FIR filtara se izbegava paran broj odbiraka u impulsnom odzivu jer unosi necelobrojno kašnjenje.

2. Širina prelazne zone između propusnog i nepropusnog opsega povezana je nelinearnom relacijom sa širinom glavnog luka u spektru prozorske funkcije.

3. Maksimalna greška amplitudske karakteristike FIR filtra zavisi na nelinearan način od maksimalne amplitude bočnih lukova u spektru prozorske funkcije.

Zbog pojava navedenih pod 2 i 3, teško je unapred proceniti da li će primena izabrane prozorske funkcije dati zadovoljavajući rezultat u sintezi FIR filtra

Prozor	Širina prelazne zone	Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu	β za ekvivalentni Kajzerov prozor	Širina prelazne zone sa ekvivalentnim prozorom
Pravougaoni	$1.8\pi/M$	-21	0	$1.81\pi/(M\text{-}1)$
Hanov	$6.2\pi/(M\text{-}1)$	-44	3.86	$5.01\pi/(M\text{-}1)$
Hemingov	$6.6\pi/(M\text{-}1)$	-53	4.86	$6.27\pi/(M\text{-}1)$
Blekmanov	$11\pi/(M\text{-}1)$	-74	7.04	$9.19\pi/(M\text{-}1)$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija

Kajzerova (Kaiser) ili Kajzer-Beselova (Kaiser-Bessel) prozorska funkcija predstavlja jednostavnu diskretnu aproksimaciju funkcije ograničenog trajanja T_K koja maksimizira energiju sadržanu u opsegu učestanosti B_K

$$w_K[n] = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2 \qquad \beta = 0.5T_K B_K$$

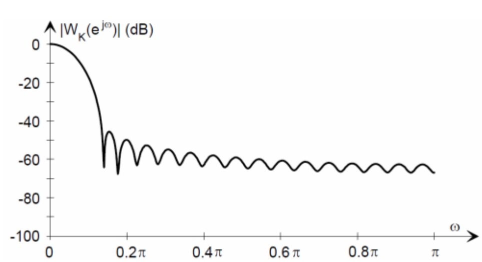
Kontinualnom promenom parametra β može se povećavati slabljenje bočnih lukova na račun proširenja glavnog luka

Digitalna obrada signala

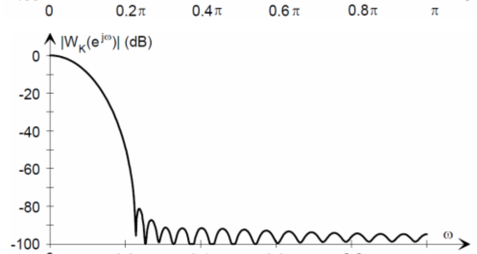
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija



$\beta = 2\pi$

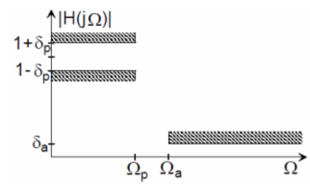


$\beta = 3.5\pi$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija

Pošto je kod Gibsovih oscilacija amplituda greške u propusnom i nepropusnom opsegu ista, i pošto prozorske funkcije samo ublažavaju dejstvo Gibsovih oscilacija, dozvoljena greška u propusnom i nepropusnom opsegu mora biti ista, tj. $\delta_p = \delta_a = \delta$.



Ako se u postupku formiranja specifikacija izaberu različite vrednosti za δ_p i δ_a , u sintezi se mora koristiti manja od dve specificirane vrednosti.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija

1

Na osnovu zadatih specifikacija Ω_p , Ω_a , α_p i α_a određuje se širina prelazne zone

$$B_t = \Omega_a - \Omega_p$$

granična učestanost idealnog NF filtra

$$\Omega_c = \frac{\Omega_a + \Omega_p}{2}$$

i vrednosti za δ_p i δ_a prema izrazima

$$\delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1}$$

$$\delta_a = 10^{-0.05\alpha_a}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija

2

Izabere se vrednost greške δ prema izrazu: $\delta = \min(\delta_p, \delta_a)$
Ako je $\delta \neq \delta_a$, *izračuna se nova vrednost za* α_a *prema izrazu:* $\alpha_a = -20\log\delta$

3

Izabere se vrednost parametra β prema empirijskom izrazu

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha_a < 21\,\mathrm{dB} \\ 0.5842(\alpha_a - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_a - 21), & 21\,\mathrm{dB} \le \alpha_a \le 50\,\mathrm{dB} \\ 0.1102(\alpha_a - 8.7), & \alpha_a > 50\,\mathrm{dB} \end{cases}$$

4

Odredi se broj članova impulsnog odziva prozorske funkcije prema izrazu

$$D = \begin{cases} 0.9222, & \alpha_a \le 21\,\mathrm{dB} \\ \dfrac{\alpha_a - 7.95}{14.36}, & \alpha_a > 21\,\mathrm{dB} \end{cases}$$

$$M \ge \frac{2\pi D}{B_t} + 1$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Kajzerova prozorska funkcija

5

Formira se
$$w_K[n] = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$
N=M

6

Izračunaju se koeficijenti razvoja funkcije prenosa idealnog NF filtra

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\Omega| \le \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Omega_c} e^{jn\Omega}d\Omega = \frac{1}{n\pi}\sin\Omega_c n, \quad |n| \le \frac{M-1}{2}$$

7

Formira se impulsni odziv FIR filtra prema izrazu

$$h[n] = h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right]w_K[n], \quad n = 0,1,\ldots,M-1$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2}\sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

VF

$$B_t = \Omega_p - \Omega_a \qquad H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\Omega| < \Omega_c \\ 1, & \Omega_c \le |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

PO

$$B_t = \min\left[(\Omega_{p1} - \Omega_{a1}), (\Omega_{a2} - \Omega_{p2})\right]$$

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} - \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} + \frac{B_t}{2}$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 1, & \Omega_{c1} \le |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \Omega_{c2} \le |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

NO

$$B_t = \min\left[(\Omega_{a1} - \Omega_{p1}), (\Omega_{p2} - \Omega_{a2})\right]$$

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} + \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} - \frac{B_t}{2}$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0, & \Omega_{c1} \le |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 1, & \Omega_{c2} \le |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Dobro - Jednostavnost i postojanje eksplicitnih izraza za odbirke skoro svih prozorskih funkcija (izuzimajući Dolf-Čebiševljevu prozorsku funkciju).

Loše -
Ako idealna frekvencijska karakteristika koju treba aproksimirati nije data jednostavnim izrazima, može se desiti da ne postoji eksplicitno rešenje za vrednost određenog integrala kojim se računa impulsni odziv. U takvom slučaju mora se pristupiti numeričkom izračunavanju integrala za šta se može iskoristiti Diskretna Furijeova transformacija.

Drugi problem koji se pojavljuje kod primene prozorskih funkcija je relativno mala fleksibilnost pri projektovanju. Iako se na početku postupka projektovanja zadaju specifikacije zagranične učestanosti Ω_p i Ω_a nema nikakve garancije da će te granice zaista biti i realizovane u postupku sinteze. Naime, zbog konvolucione veze spektara idealne karakteristike i prozorske funkcije, prozorska funkcija u suštini ublažava diskontinualni prelaz iz propusnog u nepropusni opseg kod idealnog filtra. Tako se granična učestanost idealnog filtra, Ω_c , na komplikovan način preslikava u dve granične učestanosti, Ω_p i Ω_a.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Jedan od glavnih nedostataka metoda sinteze pomoću prozorskih funkcija je što rezultujuće funkcije prenosa nisu optimalne ni po kakvom poznatom kriterijumu.

To znači, a taj zaključak je potvrđen i u praksi, da se uvek može sintetizovati filtar sa boljim performansama.

Ovaj zaključak važi čak i u slučaju da se koriste optimalne prozorske funkcije, kao što su Kajzerova ili DolfČebiševljeva, jer je dejstvo prozorske funkcije na rezultujuće rešenje posredno, preko konvolucione relacije.

Zbog toga se često, a naročito ako je na raspolaganju računar, koriste alternativne metode za projektovanje FIR filtarskih funkcija

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Sinteza FIR sistema sa prozorskim funkcijama

Jedan od glavnih nedostataka metoda sinteze pomoću prozorskih funkcija je što rezultujuće funkcije prenosa nisu optimalne ni po kakvom poznatom kriterijumu.

To znači, a taj zaključak je potvrđen i u praksi, da se uvek može sintetizovati filtar sa boljim performansama.

Ovaj zaključak važi čak i u slučaju da se koriste optimalne prozorske funkcije, kao što su Kajzerova ili DolfČebiševljeva, jer je dejstvo prozorske funkcije na rezultujuće rešenje posredno, preko konvolucione relacije.

Zbog toga se često, a naročito ako je na raspolaganju računar, koriste alternativne metode za projektovanje FIR filtarskih funkcija

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Ako se detaljnije analizira ponašanje amplitudske karakteristike, lako se može uočiti da su odstupanja amplitudske karakteristike (greška aproksimacije) najveća u blizini graničnih učestanosti.

Iz teorije analognih, kao i diskretnih IIR filtara, znatno bolji rezultati u pogledu aproksimacije amplitudske karakteristike mogu se dobiti ako se greška aproksimacije ravnomerno rasporedi unutar propusnog i nepropusnog opsega, što je pokazano na primerima Čebiševljeve i eliptičke aproksimacije.

Slična ideja se može primeniti i u sintezi FIR filtarskih funkcija, odnosno, problem aproksimacije amplitudske karakteristike FIR filtra se može posmatrati kao problem aproksimacije u Čebiševljevom smislu.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Hoćemo

NF
Kao i uvek

$$1-\delta_p \le H_r(\Omega) \le 1+\delta_p, \quad |\Omega| \le \Omega_p$$

$$-\delta_a \le H_r(\Omega) \le \delta_a, \quad |\Omega| \ge \Omega_a$$

$H_{dr}(\Omega)$ Idealna realna funkcija koju treba aproksimirati

$$W(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\Omega| \le \Omega_p \\ \dfrac{\delta_p}{\delta_a} = K, & \Omega_a < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

Težinska funkcija koja pokazuje relativan uticaj greške u pojedinom opsegu

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Greška

$$E(\Omega) = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)] = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - Q(\Omega)P(\Omega)]$$

$$E(\Omega) = W(\Omega)Q(\Omega)\left[\frac{H_{dr}(\Omega)}{Q(\Omega)} - P(\Omega)\right] = \hat{W}(\Omega)\left[\hat{H}_{dr}(\Omega) - P(\Omega)\right]$$

Čebiševljev aproksimacioni problem se sastoji u određivanju koeficijenata polinoma P(Ω) koji minimizuju maksimalnu apsolutnu vrednost E(Ω) u opsezima S učestanosti od interesa.

Treba naći skup koeficijenata α_k, koji zadovoljavaju jednačinu

$$\min_{\alpha_k,\, k\in[0,L]}\left[\max_{\Omega\in S}|E(\Omega)|\right] = \min_{\alpha_k,\, k\in[0,L]}\left\{\max_{\Omega\in S}\left|\hat{W}(\Omega)\left[\hat{H}_{dr}(\Omega) - \sum_{k=0}^{L}\alpha_k \cos\Omega k\right]\right|\right\}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Digresija

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos\Omega k$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \cos\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2-\pi/2]} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin\Omega k$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2-\pi/2]} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right) = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin\Omega\left(k-\frac{1}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{jK\pi/2} H_r(\Omega)$$

$K = 0$ I, II

$K = 1$ III, IV

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Digresija

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{jK\pi/2} H_r(\Omega)$$

$$H_r(\Omega) = Q(\Omega)P(\Omega)$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos\Omega k$$

	$Q(\Omega)$
Tip I	1
Tip II	$\cos\frac{\Omega}{2}$
Tip III	$\sin\Omega$
Tip IV	$\sin\frac{\Omega}{2}$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Teorema alternacije

S označava zatvoreni skup koji se sastoji od disjunktne unije zatvorenih podskupova ose učestanosti Ω u intervalu [0,π).

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos \Omega k$$

predstavlja jedinstvenu, najbolju Čebiševljevu aproksimaciju funkcije na skupu S

Potrebno i dovoljno

funkcija greške E(Ω) ima bar L + 2 ekstremuma na skupu učestanosti S.

Mora postojati bar L + 2 učestanosti Ω_i, i =1, … ,L + 2, gde je E (Ω_i) = - E (Ω_{i+1})

$$|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in S} |E(\Omega)|, \quad i = 1, \ldots, L+2$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Teorema alternacije

S označava zatvoreni skup koji se sastoji od disjunktne unije zatvorenih podskupova ose učestanosti Ω u intervalu [0,π).

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos \Omega k$$

predstavlja jedinstvenu, najbolju Čebiševljevu aproksimaciju funkcije na skupu S

Potrebno i dovoljno

funkcija greške E(Ω) ima bar L + 2 ekstremuma na skupu učestanosti S.

Mora postojati bar L + 2 učestanosti Ω_i, i =1, … ,L + 2, gde je E (Ω_i) = - E (Ω_{i+1})

$$|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in S} |E(\Omega)|, \quad i = 1, \ldots, L+2$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Čebiševljev polinom
$$T_N(x)=\begin{cases}\cos(N\cos^{-1}x) & |x|\le 1\\ \cosh(N\cosh^{-1}x) & |x|\ge 1\end{cases}$$

$$T_N(\cos\Omega)=\cos N\Omega$$

$$P(\Omega)=\sum_{k=0}^{L}\alpha_k\cos\Omega k=\sum_{k=0}^{L}\alpha_k T_k(\cos\Omega)=\sum_{k=0}^{L}\beta_k(\cos\Omega)^k$$

ekstremumi

$$\frac{dE(\Omega)}{d\Omega}=-\frac{dH_r(\Omega)}{d\Omega}=0$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Tip 1 $H(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega(M-1)/2}\sum_{k=0}^{(M-1)/2}a_k\cos\Omega k$

trigonometrijski polinom L-tog reda po cosω

izvod ima najviše L −1 nula, L −1 lokalnih ekstremuma

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega}=-\sin\Omega\left[\sum_{k=1}^{L}\beta_k k(\cos\Omega)^{k-1}\right]$$

$\Omega=0$ i $\Omega=\pi$ Još dva ekstrumuma

funkcija greške mora imati ekstremne vrednosti i na učestanostima Ω_p I Ω_a , inače uslov alternacije ekstremuma ne bi bio zadovoljen

Maksimalan broj ekstremuma funkcije greške je L + 3 u slučaju NF i VF filtarskih funkcija.

U slučaju PO i NO filtarskih funkcija maksimalan broj ekstremalnih tačaka funkcije greške je L + 5

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Apsolutne vrednosti svih ekstremuma su jednake, osim u tačkama $\Omega = 0$ ili $\Omega = \pi$.

Ako je vrednost funkcije greške u nekoj tački ekstremuma manja od ostalih, onda se pri numeraciji ekstremuma mora izostaviti ne samo ta tačka, već i jedna susedna, pošto inače ne bi bio zadovoljen uslov alternacije.

Zbog toga se ova klasa filtarskih funkcija naziva optimalna aproksimacija ili aproksimacija sa jednakim odstupanjima (engl. equiripple).

Potrebno i dovoljno

funkcija greške $E(\Omega)$ ima bar $L + 2$ ekstremuma na skupu učestanosti S.

Mora postojati bar $L + 2$ učestanosti Ω_i, $i = 1, \ldots, L + 2$, gde je $E(\Omega_i) = -E(\Omega_{i+1})$

$$|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in S} |E(\Omega)|, \quad i = 1, \ldots, L+2$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Kako naći takvu aproksimaciju?

Parks-MekKlelanov algoritam (Parks-McClellan)

Remezov algoritam za izjednačavanje ekstremuma
Precizno kontroliše parametre L, Ω_p, Ω_a i δ_p / δ_a,
dok je δ_p (ili δ_a) promenljivi parametar

Na učestanostima ekstremuma funkcija greške optimalnog rešenja

$$E(\Omega_n) = \hat{W}(\Omega_n)\left[\hat{H}_{dr}(\Omega_n) - P(\Omega_n)\right] = (-1)^n \delta, \quad n = 0, 1, \ldots, L+1$$

$$P(\Omega_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \ldots, L+1$$

$$\sum_{k=0}^{L} \alpha_k \cos \Omega k + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \ldots, L+1$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\Omega_0 & \cos 2\Omega_0 & \cdots & \cos L\Omega_0 & \dfrac{1}{\hat{W}(\Omega_0)} \\ 1 & \cos\Omega_1 & \cos 2\Omega_1 & \cdots & \cos L\Omega_1 & \dfrac{-1}{\hat{W}(\Omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\Omega_{L+1} & \cos 2\Omega_{L+1} & \cdots & \cos L\Omega_{L+1} & \dfrac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\Omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dr}(\Omega_0) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_L) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_{L+1}) \end{bmatrix}$$

L + 2 nepoznatih učestanosti Ω_n
L + 1 nepoznatih koeficijenata α_k
vrednost maksimalne greške δ

Remezov algoritam zamene iterativno rešava problem određivanja 2(L + 2) nepoznatih parametara

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Digresija

Remezov algoritam predstavlja iterativni postupak za određivanje najbolje ravnomerne aproksimacije neprekidne funkcije f(x) polinomom stepena n na intervalu [a, b].

Korak 0: Izabrati n + 2 različite tačke $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ sa intervala [a, b]. Obično se za x_i uzimaju nule Čebiševljevog polinoma.

Korak 1: Rešiti sistem linearnih jednačina
$b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_n x_n \ i + (-1)^i E = f(x_i)$, i = 0, 1, . . . , n + 1
po nepoznatim $b_0, b_1, \ldots, b_n$ i E.

Korak 2: Formirati polinom $p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$.

Korak 3: U tačkama x_i funkcija $p(x) - f(x)$ menja znak, pa postoji bar n + 1 nula ove funkcije koje dele [a, b] na n+2 intervala. Tačke x_i zameniti novim tačkama y_i u kojima se dostiže lokalni maksimum funkcije $|p(x) - f(x)|$ u intervalu kome pripada x_i .
Ukoliko je $p(x_i) - f(x_i) = +|E|$, treba naći lokalni maksimum funkcije $p(x) - f(x)$ u okolini x_i , a ukoliko je $p(x_i)-f(x_i) = -|E|$, naći lokalni minimum. Pošto je algoritam iterativan, ove ekstreme nije potrebno tačno izračunati, dovoljno je npr. par iteracija kvadratnog fitovanja. Tačku y_0 očekujemo da je u okolini a, tačku y_{n+1} u okolini b, a preostale y_i u okolini tačaka x_i . Označimo $z_i = p(y_i) - f(y_i)$. Po konstrukciji je $|z_i| \geq |E|$, pa je $\min_i |z_i| \geq |E|$ nova donja granica optimalne greške aproksimacije.

Korak 4: Ažurirati tačke x_i novodobijenim tačkama y_i. Pošto je $\max_i |z_i|$ gornja granica optimalne greške (dostiže se na polinomu p(x)), za kriterijum zaustavljanja se može koristiti dovoljno mala razlika $\min_i |z_i|$ i $\max_i |z_i|$. Ukoliko tačnost nije zadovoljena, ići na Korak 1.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Ali

$$\delta = \frac{g_0 \hat{H}_{dr}(\Omega_0) + g_1 \hat{H}_{dr}(\Omega_1) + \cdots + g_{L+1} \hat{H}_{dr}(\Omega_{L+1})}{\frac{g_0}{\hat{W}(\Omega_0)} - \frac{g_1}{\hat{W}(\Omega_1)} + \cdots + \frac{(-1)^{L+1} g_{L+1}}{\hat{W}(\Omega_{L+1})}} = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} g_k \hat{H}_{dr}(\Omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} \frac{(-1)^k g_k}{\hat{W}(\Omega_k)}}$$

A

$$g_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos\Omega_k - \cos\Omega_n} \qquad g_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_n}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{L} \beta_k (\cos\Omega)^k = \sum_{k=0}^{L} \beta_k x^k = P(x)$$

$$P(\Omega_i) = \hat{H}_{dr}(\Omega_i) - \frac{(-1)^i \delta}{\hat{W}(\Omega_i)}, \quad i = 0,1,\ldots,L+1$$

B

Lagranžova interpolaciona formula

$$P(x) = \frac{\sum_{k=0}^{L} P(\omega_k) \frac{b_k}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^{L} \frac{b_k}{x - x_k}}, \quad x = \cos\Omega \qquad b_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L} \frac{1}{x_k - x_n} = \frac{g_k}{x_k - x_{L+1}}$$

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

1. Pretpostavi se početni skup ekstremalnih učestanosti Ω_n, n = 0,1,... ,L +1

2. Na osnovu poznatog položaja ekstremuma odredi se vrednost δ na osnovu A a zatim na osnovu B koeficijenti polinoma P(x), odnosno P(cosΩ) .

3. Na osnovu poznatih koeficijenata polinoma P(x), izračuna se vrednost funkcije greške za veći broj diskretnih učestanosti. Uobičajeno je da se greška izračunava u 8(M + 2) tačaka, gde je M dužina impulsnog odziva. Ako je $E(\Omega_i) \geq \delta$ na nekim učestanostima, onda se izabere novi skup od L + 2 ekstremalnih učestanosti koje predstavljaju položaje ekstremuma funkcije greške E(Ω) koji moraju biti u alternirajućem rasporedu. Zatim se ponavlja faza 2.

4. Postupak se završava kada postane $|E(\Omega_i)| \leq \delta$ na svim učestanostima, odnosno kada δ prestane da se menja u iterativnom postupku.

Digitalna obrada signala
Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom
Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) = Q\left(\frac{2\pi k}{M}\right)P\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \quad k = 0,1,\ldots,U$$

$$U = \begin{cases} \dfrac{M-1}{2}, & M \text{ neparno} \\ \dfrac{M}{2} - 1, & M \text{ parno} \end{cases}$$

Dobijeni rezultat je optimalan u smislu da ima najmanju aproksimacionu grešku δ za traženu širinu prelazne zone $\Omega_a - \Omega_p$. Ako se težinska funkcija W(Ω) izabere na način kako je prikazano, onda je $\delta_a = \delta$, $\delta_p = K\delta$.

Ako je potrebno realizovati funkciju sa propisanim vrednostima za δ_p i δ_a , onda se obično fiksiraju vrednosti za M i graničnu učestanost propusnog opsega Ω_p , a vrednost granične učestanosti nepropusnog opsega, Ω_a , se varira dok se sintezom ne dobije funkcija koja ima tražene vrednosti za δ_p i δ_a
.

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

$$M \geq \frac{-10\log(\delta_p \delta_a) - 13}{2.324 B_t} + 1$$

$$M \geq \frac{2\pi D_\infty(\delta_p, \delta_a)}{B_t} - \frac{f(\delta_p, \delta_a) B_t}{2\pi} + 1$$

$$D_\infty(\delta_p, \delta_a) = \left[0.005309(\log\delta_p)^2 + 0.07114\log\delta_p - 0.4761\right]\log\delta_a - \left[0.00266(\log\delta_p)^2 + 0.5941\log\delta_p + 0.4278\right]$$

$$f(\delta_p, \delta_a) = 11.01217 + 0.51244(\log\delta_p - \log\delta_a)$$

Digitalna obrada signala

Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom

Optimizacioni metodi sinteze FIR sistema

Metod sinteze pomoću prozorskih funkcija je najjednostavniji za primenu. Na žalost, ovim metodom se ne mogu tačno realizovati zadate učestanosti Ω_p I Ω_a, *čija vrednost zavisi od korišćene prozorske funkcije i izabrane vrednosti M.* Dužina impulsnog odziva, *M, koja se dobija ovim metodom je najveća, što znači najveću složenost* realizacije.

Metod sinteze pomoću odabiranja u frekvencijskom domenu obavezno zahteva upotrebu računara i programa za optimizaciju parametara. Može se reći da je od opisanih metoda najteži za primenu. Kontrola položaja graničnih učestanosti Ω_p I Ω_a *je nešto bolja nego kada se primenjuju* prozorske funkcije, a greška graničnih učestanosti je manja od $2\pi/M$. *Mada se za sintezu koristi* praktično ista vrednost za *M kao kod metoda prozorskih funkcija, složenost realizacije je znatno* manja zbog mogućnosti korišćenja specijalne realizacione strukture.

Čebiševljeva aproksimacija omogućava najbolju kontrolu specifikacija i u tom pogledu je najbolja. Granične učestanosti Ω_p I Ω_a *se tačno realizuju, a dužina impulsnog odziva se dosta* tačno može proceniti empirijskim formulama. U filtarskim aplikacijama, potrebna dužina impulsnog odziva je znatno manja nego kod prethodna dva metoda sinteze, često i za 30%. Čebiševljeva aproksimacija je optimalna u smislu da za dato *M omogućava najmanju* širinu prelazne zone. S obzirom na široku rasprostranjenost optimizacionih programa za Čebiševljevu aproksimaciju, ovaj metod je danas standardni metod za sintezu FIR funkcija prenosa sa linearnom fazom.